

# XIII Seminario de Matemática Discreta

12 - 14 de junio de 2013

Valladolid



**POLITÉCNICA**



---

**Universidad de Valladolid**

**Comité directivo**

Jesús García López de Lacalle (UPM)

Gregorio Hernández Peñalver (UPM )

Carlos Marijuán López (UVa)

**Comité científico:**

Manuel Abellanas Oar (Geometría Computacional, UPM)

Francesc Comellas Padró (Teoría de Grafos, UPC)

Jesús García López de Lacalle (Computación Cuántica, UPM)

Félix Delgado de la Mata (Singacom, UVa)

**Comité organizador:**

Carlos Marijuán López (UVa)

Miriam Pisonero Pérez( UVa)

Webmaster: Belén Palop del Río (UVa)

**Entidades colaboradoras:**

Dpto. de Matemática Aplicada de la EU de Informática de la UPM

Dpto. de Matemática Aplicada de la Facultad de Informática de la UPM

Dpto. de Matemática Aplicada de la UVa

ETS de Ingeniería Informática de la UVa

EU de Informática de la UPM

Singacom, GIR de la UVa

TAAMC, GIR de la UVa

<http://www.infor.uva.es/~bpalop/XIII-SMD>

# XIII Seminario de Matemática Discreta

12 - 14 de junio de 2013, Valladolid

El Seminario de Matemática Discreta (SMD) es una reunión científica dirigida a investigadores en áreas temáticas de Matemática Discreta, básicas para el desarrollo de actividad investigadora en el estratégico sector de las TICs.

Estos encuentros tratan de ofrecer a investigadores del ámbito de la Matemática Discreta la oportunidad de difundir sus resultados de investigación, establecer colaboraciones con otros grupos que desarrollan líneas de investigación afines y potenciar la investigación multidisciplinar, la interrelación entre aspectos teóricos y prácticos, la orientación hacia problemas matemáticos con aplicaciones reales y el desarrollo e innovación tecnológica en las empresas.

Se promoverá la asistencia de investigadores, profesores y estudiantes.

El XIII Seminario de Matemática Discreta se celebrará en el Aula Alan Turing de la ETS de Ingeniería Informática de la Universidad de Valladolid del 12 al 14 de junio de 2013.





El programa del encuentro se articula alrededor de las siguientes actividades:

- Doce conferencias en áreas temáticas de
  - **Teoría de Grafos**,
  - **Computación Cuántica** y
  - **Geometría Computacional**.

A cada conferencia se le dedicarán 50 minutos de exposición y 10 minutos de debate.

- Una sesión final de conclusiones y de planificación de estrategias futuras relativas al propio encuentro.

Las actividades de este seminario se realizarán con arreglo al siguiente programa:

12 de junio	13 de junio	14 de junio
	<b>10:00 Conferencia 4</b> Carlos Marijuán UVa	<b>10:00 Conferencia 10</b> Vera Sacristán UPC
	<b>11:00 Conferencia 5</b> Ignacio López UDL	<b>11:00 Conferencia 11</b> Alfredo García UNIZAR
	<b>12:00</b> Pausa café	<b>12:00</b> Pausa café
	<b>12:30 Conferencia 6</b> G. Davide Paparo UPM	<b>12:30 Conferencia 12</b> Carlos Seara UPC
		<b>13:30</b> Conclusiones y planificación de estrategias. Clausura
	<b>14:00</b> Comida	<b>14:00</b> Comida
<b>16:00</b> Recepción y entrega de documentación	<b>15:30 Conferencia 7</b> Jesús Martínez UPM	
<b>16:15</b> Apertura		
<b>16:30 Conferencia 1</b> Margarida Mitjana UPC	<b>16:30 Conferencia 8</b> Vicente Martín UPM	
<b>17:30 Conferencia 2</b> Delia Garijo US	<b>17:30 Conferencia 9</b> David Elkouss UCM	
<b>18:30 Conferencia 3</b> Javier Tejel UNIZAR	<b>21:00</b> Cena Seminario	

# Programa detallado

## Miércoles 12 de junio de 2013

- 16:00 - 16:15** Recepción de participantes y entrega de documentación.
- 16:15 - 16:30** Apertura.
- 16:30 - 17:30** Conferencia de Margarida Mitjana Riera (UPC)  
Perturbing Elliptic Operators. Adding Edges in a Network
- 17:30 - 18:30** Conferencia de Delia Garijo Royo (US)  
Polinomios y homomorfismos de grafos
- 18:30 - 19:30** Conferencia de Javier Tejel Altarriba (UNIZAR)  
Grafos geométricos compatibles

## Jueves 13 de junio de 2013

- 10:00 - 11:00** Conferencia de Carlos Marijuán López (UVa)  
PageRank de sitios web jerarquizados
- 11:00 - 12:00** Conferencia de Ignacio López Lorenzo (UDL)  
Digrafos PageRank Uniformes: de la valoración de páginas web a un problema extremal en teoría de grafos
- 12:00 - 12:30** Pausa café.
- 12:30 - 13:30** Conferencia de Giuseppe Davide Paparo (UCM)  
Quantum Google in a Complex Network
- 14:00 - 15:30** Comida.
- 15:30 - 16:30** Conferencia de Jesús Martínez Mateo (UPM)  
Grafos Tanner: construcción de códigos correctores y decodificación con matrices de paridad de baja densidad
- 16:30 - 17:30** Conferencia de Vicente Martín Ayuso (UPM)  
Quantum Key Distribution in WDM Optical Networks
- 17:30 - 18:30** Conferencia de David Elkouss Coronas (UCM)  
Superactivación y regularización de la capacidad cuántica
- 21:00** Cena Seminario.

# Programa detallado

**Viernes 14 de junio de 2013**

- 10:00 - 11:00** Conferencia de Vera Sacristán Adinolfi (UPC)  
Control de sistemas robóticos modulares: algunas ideas desde la Geometría Computacional
- 11:00 - 12:00** Conferencia de Alfredo García Olaverri (UNIZAR)  
Empty Convex Polygons in Planar Point Sets
- 12:00 - 12:30** Pausa café.
- 12:30 - 13:30** Conferencia de Carlos Seara Ojea (UPC)  
On Rectilinear Convex Hulls
- 13:30 - 14:00** Conclusiones y planificación de estrategias futuras. Clausura.
- 14:00** Comida.





# Perturbing Elliptic Operators. Adding Edges in a Network

Margarida Mitjana Riera

Universitat Politècnica de Catalunya

**Abstract:** For a given finite connected network  $\Gamma$  the *combinatorial Laplacian* or simply the *Laplacian* of  $\Gamma$  is a singular self-adjoint and positive semi-definite operator. Positive semi-definite Schrödinger operators on finite connected networks are particular examples of a general class of self-adjoint operators called elliptic operators. Any elliptic operator defines an automorphism on the subspace orthogonal to the eigenfunctions associated with the lowest eigenvalue, whose inverse is called *orthogonal Green operator*. If we denote by  $\mathcal{G}$  and  $G$  the orthogonal Green operator and the Green function, respectively it is well-known that  $\mathcal{G}$  is singular self-adjoint and positive semi-definite.

Our aim is to study the effect of a perturbation of an elliptic operator on its orthogonal Green operator. More precisely, the perturbation here considered is performed by adding a self-adjoint and positive semi-definite operator; that is, for a given base network we modify the values of its conductance. We can either add some edges or delete several of them, as long as the connectedness of the network is preserved. Then, we study the way that the modification affects to the expression of the main operators and parameters of the network. In particular, here we focus in obtaining the Laplacian and the Green function of the perturbed network in terms of the corresponding operators of the base network. We also obtain the effective resistances and Kirchoff index of the new network as functions of the original one.

We apply the obtained results to the study of perturbations of a weighted Star, which includes as particular cases the Wheel and Fan networks.

Joined work with: Ángeles Carmona and Andrés M. Encinas.

# Polinomios y homomorfismos de grafos

Delia Garijo Royo

Universidad de Sevilla

**Resumen:** Dados dos grafos finitos  $G$  y  $H$ , denotamos por  $\text{hom}(G, H)$  al número de homomorfismos de  $G$  en  $H$ , es decir, aplicaciones de  $V(G)$  en  $V(H)$  que conservan adyacencias. Muchos parámetros de grafos pueden ser expresados en términos del número de homomorfismos en un grafo fijado, por ejemplo el número de  $k$ -coloraciones de un grafo  $G$  es el número de homomorfismos de  $G$  en el grafo completo  $K_k$ . Freedman, Lovász y Schrijver [1] plantean así la siguiente pregunta: ¿Qué parámetros de grafos pueden ser representados como funciones de homomorfismos en grafos con pesos?

En esta charla, caracterizaremos los grafos con pesos (en las aristas)  $H$  tales que  $\text{hom}(G, H)$  es esencialmente una evaluación del polinomio de Tutte de  $G$ , respondiendo a una pregunta también planteada por Freedman, Lovász y Schrijver en [1]. Además, daremos caracterizaciones análogas para el polinomio arista eliminación de Averbouch, Godlin y Makowsky, y el polinomio de subgrafos inducidos de Tittmann, Averbouch y Makowsky. Finalmente, situaremos estos resultados en un contexto más general; concretamente la pregunta es: ¿para qué secuencias de grafos  $(H_{\mathbf{k}})$  indexadas por un parámetro  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_h)$ ,  $h \geq 1$ , es cierto que para cada grafo  $G$ ,  $\text{hom}(G, H_{\mathbf{k}})$  es la evaluación de un polinomio en  $\mathbf{k}$ ? Un ejemplo conocido vuelve a ser la secuencia de grafos completos  $(K_k)$  ya que  $\text{hom}(G, K_k)$  es la evaluación del polinomio cromático de  $G$  en  $k$ .

Trabajo conjunto con Andrew Goodall y Jaroslav Nešet.

## References

- [1] Freedman, M., Lovász, L. and Schrijver, A., *Reflection positivity, rank connectivity and homomorphisms of graphs*, Journal of the American Mathematical Society, **20** (2007), 37-51.

# Grafos geométricos compatibles

Javier Tejel Altarriba

Universidad de Zaragoza

**Resumen:** Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano, un grafo geométrico sobre  $S$  es un grafo cuyos vértices son los puntos de  $S$  y cuyas aristas son segmentos que conectan los puntos de  $S$ . Un grafo geométrico es plano cuando dos aristas cualesquiera no se cortan entre sí. Dos grafos geométricos planos son compatibles cuando su unión es también un grafo geométrico plano.

En esta charla, se revisarán algunos de los problemas estudiados en este campo de compatibilidad de grafos geométricos planos y se verán algunos de los resultados obtenidos, así como las diferentes técnicas empleadas. Dado un grafo geométrico plano  $G$  sobre un conjunto  $S$  de puntos, nos centraremos especialmente en los problemas relacionados con la obtención, sobre el mismo conjunto de puntos, de emparejamientos o árboles geométricos planos, de forma que sean compatibles con  $G$ .

# PageRank de sitios web jerarquizados

Carlos Marijuán López

Universidad de Valladolid

**Abstract:** A theoretically as well as commercially important problem is to find a scheme for modifying the link structure of a local web in order to improve its ranking, as set by PageRank or any other ranking function. We present the most basic goal of designing a local web (or fixing an already existing one) with a tree-like structure, where the PageRank of the main page, located at the root of the tree, should have the highest possible value, preserving certain conditions given by the context.

We show that to compute the PageRank of the root in directed rooted trees it is sufficient to count the number of nodes per level of the tree, and that the linking does not affect PageRank as long as the cardinality of each level of the tree remains invariant.

We show that completely deleting the last level of a tree, or removing all but one node from levels in the upper half of a tree, always increases the PageRank of the root. We introduce the concept of queue tree, which is, for any tree, the subtree with equal root, same height and fewest possible nodes whose root's PageRank is bigger than in the original tree.

We continue our rearrangement of links in the structure of websites by tackling the case of bidirectional rooted trees, and more complex hierarchical structures as cyclical rooted trees (obtained by closing cycles on unidirectional trees). The extension of our techniques to more complex topologies requires that the condensation digraph (the acyclic digraph of strongly connected components) be a rooted tree, that the strongly connected components behave as a cyclical tree, in the sense that every node is connected to the root by a unique path, and, finally, that any two adjacent strongly connected components are connected by a unique arc. We call such structures PR- digraph trees with root.

Our results give some clues on ways of optimising the PageRank of cyclical tree-like organised sites. Obviously these rules for rearrangement should apply only so far as the context allows. We are aware that some of the rules obtained (and more that could be derived from our results) are, to some extent, already in use by web masters and SEO analysts, but as far as we have seen, without much mathematical justification.

# Digrafos PageRank Uniformes: de la valoración de páginas web a un problema extremal en teoría de grafos

Ignacio López Lorenzo

Universitat de Lleida

**Resumen:** El algoritmo *PageRank* (motor de búsqueda de Google) está diseñado para asignar una valoración a las páginas web, de forma que Google utiliza dicha valoración, junto con otros criterios, para determinar el orden en que las páginas web se muestran a un usuario que realiza una consulta. En esta charla mostraremos cómo el uso de este algoritmo en el contexto de una plataforma de blogs, puede revelar determinada información sensible. Además, mostraremos un método, denominado *n-rank confusion*, que permite resolver el problema, de forma que, cuando se hace público el digrafo que modeliza una red social tipo blog, la información extra que se pueda obtener usando el PageRank, no comprometa la privacidad de los bloggers. También estudiamos aquellas topologías donde, por su propia naturaleza, el PageRank no aporta ninguna información extra. Son los denominados *Digrafos PageRank Uniformes*.

Trabajo conjunto con Francesc Sebé.

# Quantum Google in a Complex Network

Giuseppe Davide Paparo

Universidad Complutense de Madrid

**Abstract:** In [1] we introduced a class of quantum algorithms to rank nodes in a network, possibly quantum. This class of algorithms represents a quantization of the PageRank protocol currently employed to list web pages according to their importance. In this talk we will introduce an instance of this class of quantum algorithms, that we named "Quantum PageRank", and dwell on its behavior in large complex networks [2]. Applying the quantum algorithm to a part of the real World Wide Web, we find that the algorithm is able to univocally reveal the underlying scale-free topology of the network and to clearly identify and order the most relevant nodes (hubs) of the graph according to their importance in the network structure. Moreover, for the class of scale-free graphs our results show that the quantum PageRank algorithm outperforms the classical PageRank algorithm in the sense that quantum effects generically lead to changes in the classical ranking hierarchy. Moreover, as compared to its classical counterpart, the quantum algorithm is capable to clearly highlight the structure of secondary hubs of the network, and to partially resolve the degeneracy in importance of the low lying part of the list of rankings, which represents a typical shortcoming of the classical PageRank algorithm. Complementary to this study, our analysis shows that the algorithm is able to clearly distinguish scale-free networks from other widespread and important classes of complex networks, such as Erdős-Rényi networks and hierarchical graphs. We show that the ranking capabilities of the quantum PageRank algorithm are related to an increased stability with respect to a variation of the damping parameter  $\alpha$  that appears in the Google algorithm, and to a more clearly pronounced power-law behavior in the distribution of importance among the nodes, as compared to the classical algorithm. Finally, we study to which extent the increased sensitivity of the quantum algorithm persists under coordinated attacks of the most important nodes in scale-free and Erdős-Rényi random graphs.

## References

- [1] G. D. Paparo and M. A. Martín-Delgado; "Google in a Quantum Network"; Sci.Rep. **2** , 444 (2012), arXiv:1112.2079.
- [2] G. D. Paparo, M. Müller, F. Comellas and M. A. Martín-Delgado; "Quantum Google in a Complex Network"; arXiv:1303.3891.

# Grafos Tanner: construcción de códigos correctores y decodificación con matrices de paridad de baja densidad

Jesús Martínez Mateo

Universidad Politécnica de Madrid

**Resumen:** La construcción de un código corrector de errores es un proceso cada vez más asociado al procedimiento de decodificación y el propósito del mismo. Las técnicas modernas de corrección de errores imponen nuevos requisitos en la construcción de códigos con el objetivo de mejorar la eficiencia y el rendimiento de la corrección. Un ejemplo reciente es el algoritmo *Progressive Edge-Growth*, o PEG, comunmente utilizado para la construcción de códigos de paridad de baja densidad (*Low-Density Parity-Check* o LDPC), cuando la decodificación se realiza con algoritmos basados en la propagación de la creencia. Este algoritmo permite la construcción de un código a partir de los polinomios generadores que definen una familia de códigos con una distribución de sus aristas particularmente adecuada para la decodificación. Recientes mejoras de este algoritmo permiten mejorar los códigos construidos, por ejemplo reduciendo aquellos ciclos de longitud corta que pueden interrumpir el proceso de propagación de la creencia.

# Quantum Key Distribution in WDM Optical Networks

Vicente Martín Ayuso

Universidad Politécnica de Madrid

**Abstract:** Quantum Key Distribution (QKD) is a mature technology offering information theoretic security for the secret key agreement problem. However, the current approaches to its application and commercialization require conditions that render QKD an expensive technology. All QKD networks deployed to date face one important problem: the cost of using dedicated communication infrastructure. These networks are designed as groups of separate point-to-point QKD only links, each relying on own dedicated communication links, where secret keys between non-neighbouring nodes are transmitted using the trusted repeater paradigm. Here we propose a novel network model in which multiple QKD systems use quantum and classical communication channels that are wavelength multiplexed over a common communication infrastructure. The respective signals are transmitted using passive network components within a metropolitan area, thus removing expensive trusted intermediate nodes. The design belongs to the class of switched QKD networks in which quantum communication is end-to-end and potential security loopholes are avoided. The network is wavelength addressable: simultaneous communication is allowed in a dynamically-addressed any-to-any scheme. The proposed model resembles that of a commercial telecom network, takes advantage of existing pre infrastructure and utilizes existing commercial components, allowing for an easy, cost-effective and reliable deployment.



# Superactivación y regularización de la capacidad cuántica

David Elkouss Coronas

Universidad Complutense de Madrid

**Resumen:** La capacidad para transmitir información de un canal clásico viene dada por la maximización de la información mutua entre la entrada y la salida después de un único uso del canal. En el caso cuántico, la capacidad viene dada por la regularización de la información coherente del canal después de un número ilimitado de usos. La necesidad de esta regularización ha sido mostrada recientemente por varios autores mediante construcciones en las que la información coherente es cero para un uso del canal y positiva para dos o más usos. En esta charla presentaré estos ejemplos y posibles generalizaciones.

# Control de sistemas robóticos modulares: algunas ideas desde la Geometría Computacional

Vera Sacristán Adinolfi

Universitat Politècnica de Catalunya

**Resumen:** Los robots modulares fueron introducidos a finales de los años 80. Recientemente han recibido mucha atención por parte de la comunidad investigadora, ya que su versatilidad y escalabilidad permite augurarles ventajas importantes respecto de los robots de morfología fija y propósito único. Como contrapartida, la versatilidad de los robots modulares conlleva mayores dificultades en su control. En particular, se requiere diseñar con cuidado algoritmos geométricos eficientes para resolver tareas tales como la auto-organización, locomoción, auto-reparación y, en general, reconfiguración de estos sistemas.

En esta presentación se analizarán y discutirán algunas cuestiones abiertas en este campo que, a mi entender, pueden y deben abordarse con herramientas propias de la geometría computacional y discreta. Asimismo, se expondrán diversas estrategias, en especial para resolver el problema de reconfiguración. Se trata tanto de algoritmos centralizados como de algoritmos distribuidos. Algunos se aplican a prototipos específicos de robots modulares, mientras otros tienen carácter general e independiente de las características físicas concretas de los módulos.

# Empty Convex Polygons in Planar Point Sets

Alfredo García Olaverri

Universidad de Zaragoza

**Resumen:** Erdős (1973) propuso el problema de calcular el número mínimo de  $k$ -gons convexos y vacíos contenidos en cualquier conjunto de  $n$  puntos en el plano. Si llamamos  $h_k(n)$  a estos números, contrariamente a lo conjeturado, Horton(1983) demostró que  $h_k(n) = 0$  si  $k \geq 7$ . En esta charla presentaremos las mejores cotas conocidas actualmente para los valores de  $h_3(n)$ ,  $h_4(n)$ ,  $h_5(n)$  y  $h_6(n)$  y cómo han sido obtenidas. El problema abierto más interesante en este campo es determinar si  $h_5(n)$  crece superlinealmente. También hablaremos sobre problemas del mismo tipo cuando tenemos puntos con diferentes colores, y del problema de "bloquear" de forma óptima todos los  $k$ -gons convexos, es decir determinar un conjunto mínimo de puntos de manera que, cuando se añaden al conjunto inicial, todos los  $k$ -gons convexos e inicialmente vacíos dejan de estar vacíos.

# On Rectilinear Convex Hulls

Carlos Seara Ojea

Universitat Politècnica de Catalunya

**Abstract:** The interest in the rectilinear convex hull of planar point sets arises from the study of the *ortho-convexity* [7], also known in the literature as *rectilinear*, *x-y*, or *orthogonal* convexity. This non-traditional notion of convexity has been widely studied since its formalization in the early eighties, and has found applications in theoretical research fields such as polyhedra reconstruction [2] and fixed point theory [9], as well as in the study of practical problems such as digital image shape analysis [3] and VLSI circuit layout design [8].

A set  $S \subset \mathbb{R}^2$  is said to be *ortho-convex* if the intersection of  $S$  with every horizontal or vertical line is connected, i.e, it is empty, a point, or a single interval. Unlike ordinary convex sets, an orthogonally convex set is not necessarily connected. The orthogonal convex hull of a set  $S$  is the intersection of all connected orthogonally convex supersets of  $S$ . So every convex set is orthogonally convex but not vice versa. The orthogonal convex hull itself is a subset of the convex hull of the same point set. A point  $p$  belongs to the orthogonal convex hull of  $S$  if and only if each of the closed axis-aligned orthants having  $p$  as apex has a nonempty intersection with  $S$ . The orthogonal convex hull is also known as the rectilinear convex hull, or the *x-y* convex hull. An ortho-convex set might be non-convex or disconnected. The latter property hinders the definition of an ortho-convex closure that resembles the properties of the traditional convex hull and as a consequence, several definitions have been presented by different authors.

In this talk we use the *maximal ortho-convex*, or *mr-convex* hull stated by Ottmann et al. [6], and we focus on the following problems.

1.- Let  $S$  be a set of  $n$  points in the plane. We show how to solve the problem of computing an orientation of the plane for which the rectilinear convex hull of  $S$  has minimum area in optimal  $\Theta(n \log n)$  time and  $O(n)$  space. To do this we show how the set of orientations can be divided into a linear sequence of orientation intervals such that we can compute the angle which minimizes the area of the rectilinear convex hull of  $S$  [1]. As an application, we show how to solve the problem of fitting a two-joint orthogonal polygonal chain to the set  $S$ , where the objective function

is to minimize the maximum orthogonal distance from  $S$  to the chain. This problem can be solved in  $\Theta(n)$  time and space if the orientation of the chain is fixed, and in  $\Theta(n \log n)$  time and  $O(n)$  space when the orientation is not a priori known [5].

2.- The rectilinear convex layers of  $S$  are defined in a similar way as the convex layers of  $S$ . We show an  $O(n \log n)$  time and  $O(n)$  space algorithm to calculate the rectilinear convex layers of  $S$ . We also give an  $O(n^2)$  time and space algorithm to calculate the rotation of  $S$  that minimizes the number of rectilinear convex layers of  $S$  [4].

## References

- [1] C. Alegría-Galicia, T. Garduño, A. Rosas-Navarrete, C. Seara, and J. Urrutia. Rectilinear convex hull with minimum area. *XIV Spanish Meeting on Computational Geometry*. Alcalá de Henares (Spain), June 27-30, 2011.
- [2] T. Biedl and B. Genç. Reconstructing orthogonal polyhedra from putative vertex sets. *Computational Geometry: Theory and Applications*, Vol. 44:8, (2011), 409–417.
- [3] A. Biswas, P. Bhowmick, M. Sarkar, and B. B. Bhattacharya. Finding the orthogonal hull of a digital object: a combinatorial approach. *International Conference on Combinatorial Image Analysis*, (2008), 124–135.
- [4] C. Peláez, A. Ramírez-Vigueras, C. Seara, and J. Urrutia. On the rectilinear convex layers of a planar set. *28th European Workshop on Computational Geometry*. March 19-21, Assisi, Perugia, (Italy), 2012.
- [5] J. M. Díaz-Báñez, M. A. López, M. Mora, C. Seara, and I. Ventura. Fitting a two-joint orthogonal chain to a point set. *Computational Geometry: Theory and Applications*, Vol. 44(3), (2011), 135–147.
- [6] T. Ottman, E. Soisalon-Soisinen, and D. Wood. On the definition and computation of rectilinear convex hulls. *Information Sciences*, Vol. 33, (1984), 157–171.
- [7] G. J. E. Rawlins and D. Wood, Ortho-convexity and its generalizations. *G. T. Toussaint (editor), Computational Morphology: A Computational Geometric Approach to the Analysis of Form*, Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland, 1988, 137–152.
- [8] E. Uchoa, M. P. de Aragão, and C. C. Ribeiro. Preprocessing Steiner problems from VLSI layout. *Networks*, Vol. 40:1, (2002), 38–50.
- [9] M. A. Khamsi and W. A. Kirk. *An introduction to metric spaces and fixed point theory*. Wiley-Interscience, 2001.